E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.P.I. LYON - I.S.E.M. - I.S.E.N. - I.S.E.P.
Ecoles associées : E.I.S.T.I. - ECOLE LOUIS DE BROGLIE

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1993

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

SERIE M *Vendredi 28 mai 1993 de 8 h à 12 h*

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe. "L'usage de la calculatrice est autorisé".

L'objet de ce problème est l'étude des intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt, \text{ pour } n \geqslant 1,$$

et de séries associées.

I. Etude de $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

1) Montrer que l'intégrale définissant I_1 est convergente.

2) Montrer que l'intégrale définissant I_1 n'est pas absolument convergente.

3) Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

a) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$ et admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b) Pour n, entier non nul, on pose $f_n(x) = \int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.
Montrer que f_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et en déduire que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que : $\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ et en déduire l'expression de f(x) pour $x > 0$.

4) Dans cette question on étudie la continuité de f en 0 à droite.

a) Montrer que : $\forall x > 0 \quad f(0) - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} \sin\left(\frac{t}{x}\right) dt$.

b) Soit g définie par : $\begin{cases} g(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ g(0) = 1. \end{cases}$

Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur de $g'(0)$ et déterminer le signe de $g'(t)$ pour $t \in [0,+\infty[$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant f(0) - f(x) \leqslant 2x$$

d) Conclure.

5) Calculer I_1.

6) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt$ pour tout α réel.

II. Etude de $I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$ pour $n \geqslant 2$.

<u>Dans toute cette partie</u>, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que l'intégrale définissant I_n est absolument convergente.

2) Montrer que $I_n > 0$ (on pourra utiliser la série de terme général $v_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$ pour n impair).

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$ (on pourra couper l'intervalle [0,1] en deux).

4) Montrer que : $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^n dt \leqslant \frac{1}{n-1}$.

5) Déduire des questions précédentes la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

III. Etude des séries de termes généraux I_n et $(-1)^n I_n$.

1) Pour tout entier n on pose $\omega_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

a) Montrer que la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Trouver une relation entre ω_n et ω_{n-2} pour tout $n \geqslant 2$. En déduire la valeur de $n\,\omega_n\omega_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

c) Montrer qu'en $+\infty$, ω_n est équivalent à ω_{n-1}, puis que ω_n est équivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2) Etablir : $\forall x \in [0,1] \quad \sin x \geqslant x\sqrt{1-x^2}$.

3) En déduire que : $\forall n \geqslant 1 \quad I_{2n} \geqslant \omega_{2n+1}$.

4) Quelle est la nature de la série de terme général I_n ?

5) Montrer que, pour tout entier $N \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^k I_k = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t + \sin t}\left(1 - (-1)^N \left(\frac{\sin t}{t}\right)^N\right) dt.$$

6) Prouver que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t + \sin t}\, dt$ converge.

7) En déduire que la série de terme général $(-1)^n I_n$ est convergente et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

IV. Calcul des I_n, pour $n \geqslant 2$.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad (\sin t)^{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\left((-1)^p C_{2p}^p + 2\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k \cos(2(p-k)t)\right)$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (\sin t)^{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2p+1}^k \sin((2p-2k+1)t)$$

2) Etablir $I_n = \frac{1}{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \frac{d}{dt} [(\sin t)^n] \, dt$.

3) Montrer que : $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^{n-k}} \frac{d^k}{dt^k} [(\sin t)^n] = \frac{n!}{(n-k)!}$

où $\frac{d^k}{dt^k} [(\sin t)^n]$ désigne la dérivée k-ième de $t \mapsto (\sin t)^n$.
(On pourra utiliser les séries entières).

4) En déduire que $I_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [(\sin t)^n] \, dt$.

5) En utilisant le résultat du I.6), exprimer I_n en fonction de n, en distinguant les cas n pair et n impair.

Vérifier que : $\frac{I_n}{\pi} \in \mathbb{Q}$.
